

Title	Kahler Geometryのまわりの2つの話題 (超函数と線型微分方程式 III)
Author(s)	森川, 寿
Citation	数理解析研究所講究録 (1975), 227: 86-96
Issue Date	1975-02
URL	http://hdl.handle.net/2433/105387
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Kähler geometry のまわりの 2つの話題、

名大理 森川 寿

Vector bundle の理論に応用出来るのかと考
えた2つの話題について話す。

(その1) a certain algebra associated
to a polarized algebraic variety.

(予想) polarized algebraic variety V 上の
ample divisors の \mathbb{Q} -係数の homology 類
の全体は convex cone をなすが、この cone
は, divisors の \mathbb{Q} -係数の homology 類全体に
Jordan algebra (semi-simple) の構造が入り、
その positive な元のみをなす convex cone と一致
するであらう。

この話は、上の予想に対する部分的解答である。

(記号)

V : polarized algebraic variety, $n = \dim V$,
defined over \mathbb{C}

ω : fundamental form $\in H^{(1,1)}(V, \mathbb{Q})$,
 $H^{(p,q)}(V, \mathbb{C}) = \{ \text{harmonic forms of type } (p,q) \}$,
with respect to ω

$$h^{(p,q)}(V, \mathbb{Q}) = H^{(p,q)}(V, \mathbb{C}) \cap H^{2p}(V, \mathbb{Q}),$$

$$h(V, \mathbb{Q}) = \bigoplus_{l=0}^n h^{(l,l)}(V, \mathbb{Q}),$$

$\bar{\partial} \cdot \eta = \bar{\partial} \wedge \eta$ is cohomologous to harmonic form,

$$L\varphi = \omega \cdot \varphi, \quad \Lambda = *L* \quad (L \text{ の adjoint})$$

新しい non-associative composition \circ を
 $h^{(1,1)}(V, \mathbb{Q})$ の上に、次のように定義する,

$$\varphi \circ \psi = \frac{1}{2} \{ \Lambda \varphi \cdot \psi + \Lambda \psi \cdot \varphi - \Lambda(\varphi \cdot \psi) \}$$

(予想) $(h^{(1,1)}(V, \mathbb{Q}), \circ)$ は semi-simple Jordan algebra であらう。

Jordan algebra に 133 134.

1) $\dim V = 2$ のとき,

2) V が polarized abelian variety のとき
 のときは、 $\text{End}_{\mathbb{Q}}(V)$ に polarization より,
 involution $*$ が入り, その symmetric elements
 のつくる Jordan algebra と canonically に
 isomorphic になる。

加藤孝文は一般に次の定理を証明した。

(定理) V を \mathbb{C} 上定義された, nonsingular
 polarized algebraic variety としたとき,
 bilinear form on $H^{(1,1)}(V, \mathbb{Q})$ を

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \wedge(\varphi \circ \psi)$$

で定義すると

$$(i) \quad \langle \varphi \circ \psi, \phi \rangle = \langle \varphi, \psi \circ \phi \rangle,$$

$$(ii) \quad \langle \varphi, \varphi \rangle > 0 \quad (\varphi \neq 0).$$

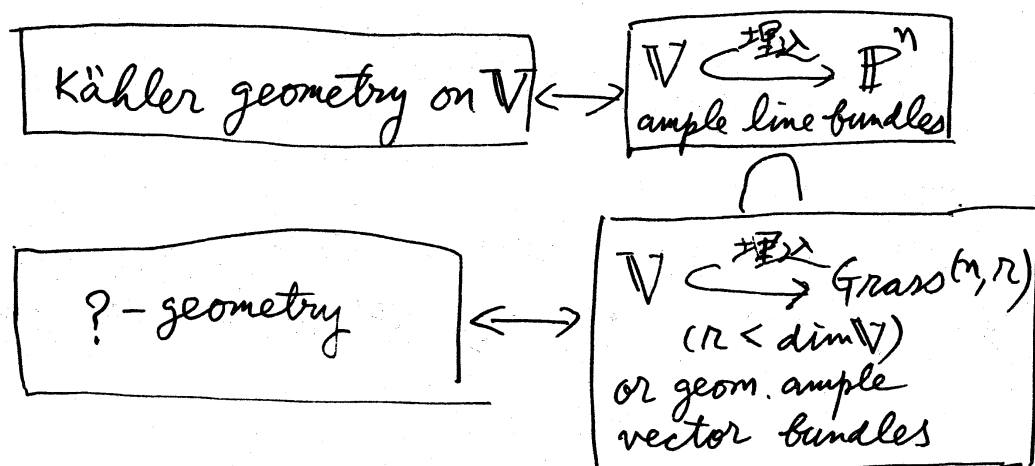
従って $(H^{(1,1)}(V, \mathbb{Q}), 0)$ は semi-simple である。

この定理は一般の polarized variety でも, abelian
 variety のときのように, isogeny 分解の可能性を

示している。

(その2) canonical $sl(2r+2)$ Lie algebra bundle
over $Grass(n, r)$.

次の図を考察しよう



Kähler geometry の公式, 定義, 定理, analogy?
例えば, Lefschetz 分解の拡張とか, 種々の vanishing
theorem が、この立場から得られるであろうか? この證は
そのための極く最初の部分の試みである。

ω_V : V 上の fundamental form $\in H^{(1,1)}(V, \mathbb{Q})$,

$L_V = \sqrt{-1} \partial(\omega_V)$, $\Lambda_V = -\sqrt{-1} \bar{\partial}(\omega_V)$ (L_V の adjoint)

$H_{p,q} = \sum (p+q - \dim V) \pi^{p,q}$

$E(V)$ = exterior algebra bundle

$\wedge^*(T^*V \oplus \overline{T^*V})$

とすれば

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow L_V, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \Lambda_V, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow H_V$$

存在対応で Lie algebra $sl(2)$ は vector bundle

$E(V)$ に作用する. Lefschetz 分解は

$$E(V) = \bigoplus_{l=0}^{\dim V} L_V^l E_{\text{prim}}(V),$$

$$E_{\text{prim}}(V) = \ker \Lambda_V$$

と考えてよい. この分解は $sl(2)$ の $E(\mathbb{P}^n)$ への canonically な作用から, 埋込み $V \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ によって得られる.

$r > 0$ のとき, この $sl(2)$ に対応するものが, 知られている

$\text{Grass}(n, r)$ 上の $sl(2r+2)$ Lie algebra bundle $\mathcal{L}(n, r)$ で $E(\text{Grass}(n, r))$ に canonically に作用する, non-trivial な bundle である.

(記号)

$$\begin{array}{ccc}
 U(n+1) & \text{unitary group} & \\
 \downarrow \lambda & & \\
 \tilde{\pi} \left(U(n+1, n+1) = U(n, n) \backslash U(n+1) \right) & & \\
 \downarrow \pi & & \left. \begin{array}{l} \text{principal} \\ U(n+1)\text{-bundle} \end{array} \right\} \\
 \text{Grass}(n, n) = U(n+1) \backslash U(n+1, n+1) & &
 \end{array}$$

$$U(n+1, n+1) = \{w \mid (n+1) \times (n+1)\text{-matrices}, w^t \bar{w} = I\}$$

$x \in +\infty$ まで ∞

$$S = \left\{ \exp \begin{pmatrix} 0 & B \\ \pm B & 0 \end{pmatrix} \mid \overbrace{B}^{n \times n}, \|B\| < x \right\} \subset U(n+1)$$

の像

$$\sigma(W) = \lambda(S) \subset U(n+1, n+1)$$

$$W = \tilde{\pi}(S) \subset \text{Grass}(n, n)$$

9 10 11 = bijection \exists 矢 \exists \exists よ \exists \exists \exists

$$S \xrightarrow{\lambda} \sigma(W) \xrightleftharpoons[\sigma]{\pi} W$$

$U(n+1)$ の π を α でずらせて

$$W_\alpha = \tilde{\pi}(S\alpha) = W\alpha,$$

$$\tilde{\sigma}_\alpha(W_\alpha) = \lambda(S\alpha) = \sigma(W)\alpha,$$

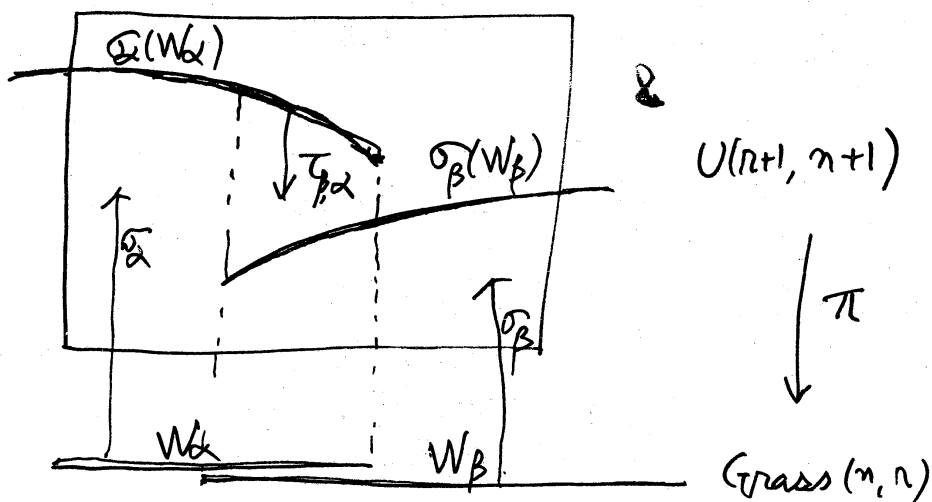
$$\tilde{\sigma}_\alpha(W_\alpha) \xrightarrow[\leftarrow \tilde{\sigma}_\alpha]{\pi} W_\alpha$$

とする. $\tilde{\sigma}_\alpha(W_\alpha)$ と $\sigma_\beta(W_\beta)$ とは

$\tau_{\beta,\alpha} : W_\alpha \cap W_\beta \rightarrow U(n+1)$ なる変換で

$$\sigma_\beta = \tau_{\beta,\alpha} \circ \tilde{\sigma}_\alpha$$

となる. $\text{Grass}(n, r) = \bigcup_\alpha W_\alpha$ のはり合せて $\text{Grass}(n, r)$ の chart を与える.



$U(n+1, n+1)$ の座標 $w = (\underbrace{\bar{w}^{(1)}}_{n+1}, \underbrace{w^{(2)}}_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$, $w^+ \bar{w} = I$
を用いて, $U(n+1)$ -right invariant connection form

$$\theta = w d^+ \bar{w},$$

その curvature form

$$\omega = d\theta + \theta \wedge \theta$$

をより,

$$\boxed{\omega^{(\alpha)} = \omega|_{\mathcal{Q}(W_\alpha)} \quad \text{restriction}}$$

と定義すれば, 変換式

$$\boxed{\tau_{\beta, \alpha}^* (\omega^{(\beta)}) = \tau_{\beta, \alpha} \omega^{(\alpha)} \tau_{\beta, \alpha}^{-1} \quad (\S 13.1(12))}$$

を得る. 一方 $U(n+1, n+1)$ の標準点 $(I, 0)$ では

$$\theta_{(I, 0)} = -dw^{(1)} = d^+ \bar{w}^{(2)},$$

$$\omega_{(I, 0)} = dw^{(2)} \wedge d^+ \bar{w}^{(2)} = \left(\sum_{l=1}^{n+1} dw_{il}^{(2)} \wedge d\bar{w}_{jl}^{(2)} \right)_{1 \leq i, j \leq n+1}$$

となる.

Vector bundle

$$E(\mathcal{Q}_\alpha(W_\alpha)) = \Lambda^* (T^* \mathcal{Q}_\alpha(W_\alpha) \oplus \overline{T^* \mathcal{Q}_\alpha(W_\alpha)})$$

に作用する, linear operators $L_{ij}^{(\alpha)}, \Lambda_{ij}^{(\alpha)}$ を

$$L_{ij}^{(\alpha)} = \sqrt{-1} \, e(\omega_{ij}^{(\alpha)}) \quad \omega^{(\alpha)} = (\omega_{ij}^{(\alpha)})_{1 \leq i, j \leq n+1}$$

$$\Lambda_{ij}^{(\alpha)} = -\sqrt{-1} \, i(\omega_{ij}^{(\alpha)}),$$

$$L^{(\alpha)} = (L_{ij}^{(\alpha)})_{1 \leq i, j \leq n+1}, \quad \Lambda^{(\alpha)} = (\Lambda_{ij}^{(\alpha)})_{1 \leq i, j \leq n+1}$$

で定義すれば

$$\begin{aligned} \tau_{\beta, \alpha}^* (L^{(\beta)}) &= \tau_{\beta, \alpha} L^{(\alpha)} \tau_{\beta, \alpha}^{-1} \\ \tau_{\beta, \alpha}^* (\Lambda^{(\beta)}) &= {}^t \tau_{\beta, \alpha}^{-1} \Lambda^{(\alpha)} {}^t \tau_{\beta, \alpha} \end{aligned}$$

一方 $\mathrm{sl}(2n+2)$ の表現 $\rho^{(\alpha)}$ を

$$\begin{aligned} \rho^{(\alpha)} \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline A & 0 \end{array} \right) &= \mathrm{tr} (A L^{(\alpha)}) \\ \rho^{(\beta)} \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) &= \mathrm{tr} ({}^t B \Lambda^{(\alpha)}) \end{aligned}$$

で定義すればと加出来る.

これより

$$\tau_{\beta, \alpha}^* (\rho^{(\beta)}(X) \vec{z}_\beta) = \rho^{(\alpha)} \left(\left(\begin{array}{c|c} \tau_{\beta, \alpha} & 0 \\ \hline 0 & \tau_{\beta, \alpha} \end{array} \right)^{-1} X \left(\begin{array}{c|c} \tau_{\beta, \alpha} & 0 \\ \hline 0 & \tau_{\beta, \alpha} \end{array} \right) \right) \tau_{\beta, \alpha}^* \vec{z}_\beta$$

なる変換式を得る.

従って

$$\mathcal{L}(n, r) = \bigcup_{\alpha} \mathcal{Q}(W_{\alpha}) \times \mathcal{A}l(2r+2) / \sim$$

$$(\bar{z}_{\alpha}, X_{\alpha}) \sim (\bar{z}_{\beta}, X_{\beta})$$

を

$$\pi \bar{z}_{\alpha} = \pi \bar{z}_{\beta}, \quad X_{\beta} = \left(\begin{array}{c|c} \tau_{\beta, \alpha} & 0 \\ \hline 0 & \tau_{\beta, \alpha} \end{array} \right)^+ X_{\alpha} \left(\begin{array}{c|c} \tau_{\beta, \alpha} & 0 \\ \hline 0 & \tau_{\beta, \alpha} \end{array} \right)$$

で定義すれば

$$E(\text{Grass}(n, r)) = \bigcup_{\alpha} E(\mathcal{Q}(W_{\alpha})) / \sim$$

$$\bar{z}_{\alpha} \sim \bar{z}_{\beta} \iff \bar{z}_{\alpha} = \tau_{\beta, \alpha}^* \bar{z}_{\beta}$$

なる故, $\mathcal{L}(n, r)$ は $E(\text{Grass}(n, r))$ に canonically
に作用する.

文献

[1] Y. Kato, On the semisimplicity of the algebra associated to a polarized algebraic variety,

Nagoya math. Jour. 1 = 出版予定

[2] H. Morikawa, On a certain algebra

associated with a polarized algebraic variety,

Nagoya Math. Jour. vol 53 (1974).

[3] H. Morikawa, A canonical $sl(2r+2)$

Lie algebra bundle over Grass (n, r) ,

Nagoya Math. Jour. vol 54 (1974).